Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2020

Reelle Algebra und Einführung in die o-Minimalität
Blatt 6
Abgabe: 02.07.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (10 Punkte).

Gegeben einen angeordneten Körper K ist ein Ideal $\mathcal{I} \subset K[T_1, \ldots, T_n]$ *reell*, falls für alle natürlichen Zahlen m aus $\mathbb{N}$ und nicht-null positiven Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ aus K sowie Polynome $f_1, \ldots, f_m$ aus $K[T_1, \ldots, T_n]$ folgende Äquivalenz gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot f_i^2 \in \mathcal{I} \quad \Longleftrightarrow \quad f_i \in \mathcal{I} \text{ für alle } 1 \le i \le m.$$

a) Wenn K reell abgeschlossen ist, zeige, dass wir in der Definition eines reellen Ideals annehmen können, dass alle λ_i den Wert 1 haben.

b) Zeige, dass ein Primideal $\mathcal{P}$ in $K[T_1, \ldots, T_n]$ genau dann reell ist, wenn sich die Anordnung von K auf den Quotientenkörper von $K[T_1, \ldots, T_n]/\mathcal{P}$ fortsetzen lässt.

c) Ist das von T^2 erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[T]$ reell?

d) Ist das von $T^5 - 5$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[T]$ reell?

e) Zeige induktiv über k, dass jedes reelle Ideal $\mathcal{I}$ radikal ist: wenn f^k in $\mathcal{I}$ für ein $k \ge 1$ aus $\mathbb{N}$, dann liegt f in $\mathcal{I}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte).

Zeige mit Hilfe der Vollständigkeit der Theorie RCF, ohne Quantorelimination zu verwenden, dass sich der Körper $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}$ der algebraischen reellen Zahlen in jeden reell abgeschlossenen Körper elementar einbetten lässt.
Hinweis: Wenn eine vollständige Theorie in einer abzählbaren Sprache ein Primmodell besitzt, dann ist es bis auf Isomorphie eindeutig.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.